Die absoluten Grundlagen der Logik

Die Grundlagen der formalen Logik sind schon deshalb leicht zu verstehen, weil die Logik auf evidenten Grundsätzen aufbaut, auf Sätzen also, denen jeder unmittelbar zustimmen sollte. Diese sind:

1) Der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:
Es ist nicht möglich, zu sagen, ein Aussagesatz sei wahr und falsch zugleich.

2) Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten:
Ein Aussagesatz ist immer entweder wahr oder falsch.

3) Der Satz der Kontravalenz:
Von zwei gegensätzlichen Sachverhalten besteht genau einer.

4) Der Satz der Identität:
Ein Gegenstand ist mit sich selbst identisch bzw. ein Sachverhalt hat sich selbst zur (hinreichenden) Bedingung.

Wenn wir die vier Sätze einmal an Hand von einem Beispiel durchgehen, zeigt sich ihre Evidenz in aller Pracht. Wenn ich sage „Heute ist kalendarisch ein Sommertag.“, so ist das wahr oder falsch. Sage ich diesen Satz heute, ist er wahr. Sage ich ihn im Winter, ist er falsch. Aber er ist niemals zugleich wahr und falsch und er ist auch nichts dazwischen. Vielleicht weiß ich nicht, ob heute ein kalendarischer Sommertag ist, weil ich nicht weiß, wann kalendarisch Sommer ist. Das ist aber keine Unklarheit bezüglich der Wahrheit des Satzes, sondern eine Unklarheit in meinem Urteil. Auch wenn ich es nicht weiß, kann ich mit Sicherheit sagen, dass es entweder so ist oder nicht. Der Satz der Identität bedarf noch nicht einmal eines Beispiels. Man kann ihn nachvollziehen, wenn man versucht sich vorzustellen, man wäre nicht man selbst. Viel Spaß!

Aber was passiert überhaupt, wenn man einen Aussagesatz bildet? Nehmen wir ein simples Beispiel: „Peter weint.“. Zunächst die Frage, ist der Satz wahr oder nicht. Wir können nur generell antworten: Er ist wahr, wenn Peter weint. Und falsch, wenn er es nicht tut. Um zu entscheiden, ob der Satz wahr ist, muss man die Welt betrachten und herausfinden, ob Peter weint. Wer Peter ist und was Weinen ist, muss dabei natürlich feststehen. Wenn wir den Satz „Peter weint.“ zerlegen, zeigt sich folgende Struktur von Aussagesätzen: Wir haben ein Individuum, Peter, dem wir eine Eigenschaft zuweisen, nämlich weinend zu sein. Da man auch Dingen Eigenschaften zuweisen kann – etwa meinem Fahrrad die Eigenschaft rot zu sein – spricht man in der Logik von Gegenständen oder Entitäten, denen Eigenschaften oder Prädikate zugewiesen werden. Unter die Gegenstände fallen auch Menschen und Tiere und so weiter.

Jetzt wird es komplexer, denn die Sprache erlaubt uns, einfache Aussagesätze (genannt *atomare* Sätze) zu *komplexen* Sätzen zu verbinden. Die Verbindungen zwischen atomaren Sätzen, die den Wahrheitswert des komplexen Satzes definieren, heißen (logische) *Junktoren*. Wir hatten ja gesehen, dass jeder Satz entweder wahr oder falsch und nichts Drittes ist. Will man nun mehrere Sätze verbinden, ergeben sich Kombinationsmöglichkeiten von Wahrheitswerten, wobei jeder Junktor mit den Wahrheitswerten der atomaren Aussagen anders umgeht.
Wieder wird ein Beispiel helfen, die Sache zu verdeutlichen: Nehmen wir den Satz „Heute ist ein kalendarischer Sommertag.“, der heute wahr ist. Nehmen wir dazu den Satz „Heute ist Montag.“, der heute ebenfalls wahr ist. Sagt man also heute den Satz „Heute ist ein Sommertag und heute ist

Montag.“, sagt man einen wahren Satz. Sagt man hingegen „Heute ist ein Wintertag und heute ist Montag.“, sagt man einen falschen Satz. Ebenso falsch sind die Sätze „Heute ist ein Sommertag und heute ist Dienstag.“ und „Heute ist ein Wintertag und heute ist Dienstag.“. Nur beim ersten Satz (Sommertag und Montag) hat man eine wahre komplexe Aussage gemacht, denn die beiden atomaren Sätze „Heute ist ein Sommertag.“ und „Heute ist Montag.“ sind wahr und der Junktor „Und“ ist so definiert, dass er eine wahre Aussage ergibt, wenn die beiden Sätze, die durch ihn verbunden werden, wahr sind. Ansonsten ist der komplexe Satz falsch. Man geht nun in der formalen Logik hin und ersetzt atomare Sätze durch Buchstaben und für „Und“ schreibt man das Symbol „∧“. Man kann dann tabellarisch arbeiten. Das ganze sieht so aus:

P	Q	P ∧ Q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Ein mit „Und“ gebildeter komplexer Satz ist genau dann wahr, wenn beide Teilsätze wahr sind. Neben „Und“ gibt es in der Aussagenlogik noch die Junktoren „Oder“, „Wenn, dann“, „Genau dann, wenn“ und das „Nicht“, das den Wahrheitswert einer Aussage umdreht. Die logische Bedeutung der übrigen Junktoren braucht uns hier nicht weiter zu interessieren. Gucken wir uns stattdessen lieber ein Beispiel für eine logisch gültige Deduktion an.

Eine „logisch gültige Deduktion“ (auch „logisch gültiges Argument“ genannt) ist eine Aussage, die Konklusion, mit Sicherheit aus einer Menge von Aussagen, den Prämissen, folgen muss. Ein primitives Beispiel wäre, einen Satz aus sich selbst zu folgern (s. Satz der Identität):

P1) Heute ist ein Sommertag.

K) Also ist heute ein Sommertag.

Auch wenn der Erkenntnisgewinn, den man durch dieses Argument erhält, gleich Null ist, lässt sich nicht bestreiten, dass K) wahr sein muss, wenn P1) wahr ist. Gucken wir uns ein besseres Beispiel an:

P1) Heute ist ein Sommertag und heute ist Montag.

K1) Also ist heute ein Sommertag.

K2) Also ist heute Montag.

Aus der Wahrheit des komplexen Satzes P1) folgt die Wahrheit von K1) und K2), weil ein durch ein „Und“ verbundener, wahrer Satz zwei wahre Teilsätze haben muss. Wer P1) zustimmt, kann K1) und K2) nicht bestreiten. Wichtig ist nun, dass logische Gültigkeit nicht heißt, dass aus wahren Sätzen ein anderer wahrer Satz folgt. Logische Gültigkeit beschreibt eine Wenn-dann-Beziehung: Wenn die Prämissen eines Arguments wahr sind, darf die Konklusion nicht falsch sein, sprich angenommen die Prämissen sind wahr, so muss unter allen denkbaren Umständen auch die Konklusion wahr sein. Am besten wieder zwei Beispiele. Zunächst ein Klassiker:

P1) Alle Menschen sind sterblich.

P2) Sokrates war ein Mensch.

K) Sokrates war sterblich.

Wir würden sagen P1) und P2) sind wahr und K) folgt aus diesen beiden Prämissen. Aber nur letzteres ist für die logische Gültigkeit entscheidend. So ist nämlich auch folgendes Argument logisch gültig:

P1) Alle Menschen atmen seit jeher durch Kiemen.

P2) Sokrates war ein Mensch.

K) Sokrates atmete durch Kiemen.

P1) ist offensichtlicher Blödsinn, doch das ist für die Gültigkeit eines Arguments völlig egal, denn angenommen P1) wäre wahr und P2) ebenso, so muss K) mit Sicherheit folgen. Dieses Beispiel geht übrigens über die oben angerissene Aussagenlogik (AL), die *einzelnen* Individuen Eigenschaften zuweist, hinaus, da P1) eine Aussage über „alle“ Menschen macht. Es sollte dennoch klar sein, dass K) folgen muss, wenn P1) und P2) gelten.

Da man als Philosoph nicht nur nach bedingter Wahrheit sucht, sondern nach „definitiver“ Wahrheit, hilft einem ein logisch gültiges Argument auch nur bedingt weiter. Es ist sozusagen eine notwendige Bedingung für logische Argumentation, gültige Argumente zu liefern. Der Idealfall ist aber ein *schlüssiges Argument*, denn Schlüssigkeit bedeutet, dass ein Argument nicht nur logisch gültig ist, sondern zudem noch über „tatsächlich wahre“ Prämissen verfügt. Das Argument

P1) Alle Menschen sind sterblich.

P2) Sokrates war ein Mensch.

K) Sokrates war sterblich.

ist ein Beispiel für ein schlüssiges Argument, denn P1) und P2) würden wir als wahr bezeichnen, und wenn P1) und P2) wahr sind, muss K) folgen.